## Лабораторная работа №2

Компьютерная алгебра[[1]](#footnote-1) — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы. Часто говорят, что к компьютерной алгебре относятся вопросы, слишком алгебраические, чтобы содержаться в учебниках по вычислительной математике и слишком вычислительные, чтобы содержаться в учебниках по алгебре. При этом ответ на вопрос о том, относится ли конкретная задача к компьютерной алгебре, часто зависит от склонностей специалиста.

Компьютерная алгебра[[2]](#footnote-2) – это наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов. Синонимами термина «компьютерная алгебра» являются «символьные вычисления», «аналитические вычисления», «аналитические преобразования», «формальные вычисления».

## Представление базовых объектов компьютерной алгебры[[3]](#footnote-3)

Базовые объекты компьютерной алгебры

* Целые числа
* Рациональные числа
* Полиномы от одной переменной
* Полиномы от нескольких переменных
* Рациональные функции

Возможны различные способы представлений целых чисел:

1. Ограниченной точности, когда количество цифр в целом числе задано. К таковым относятся все стандартные арифметики в языках программирования.
2. Произвольно заданной точности, когда количество цифр в заданном числе можно менять, но только один раз – задавать перед вычислениями.
3. Неограниченной точности, когда количество цифр в числе не ограничивается никаким наперёд заданным числом, кроме ограничений, связанных с размером памяти машины.

В системах компьютерной алгебры целые числа

неограниченной точности, реализуются программным путем,

(этот тип данных считается базовым).

Возможны различные способы представлений рациональных чисел произвольной точности:

(1) отношение числителя и знаменателя (оба – числа произвольной точности), более точно, в виде записи, хранящей ссылку на список – числитель и ссылку на список – знаменатель. Такое представление является нормальным. Проблема – для нормального представления необходимо распознавание идентичных чисел.

(2) Также, как в (1), но выполнив дополнительные условия:

* числитель и знаменатель числа должны быть сокращены на наибольший общий делитель (НОД);
* знаменатель должен быть положительным числом.

Проблема - требуется вычисление НОД двух целых чисел произвольной точности.

При большом количестве цифр в числах эта процедура является алгоритмически сложной. Тем более, её надо производить на одном из самых низких уровнях вычислений – при каждом вычислении чисел.

Замечание. В системах компьютерной алгебры обычно используется каноническое представление рациональных чисел произвольной точности.

## Представление алгебраических функций

Алгебраическая функция[[4]](#footnote-4) - функция, связанная с независимым переменным алгебраическим уравнением.

Алгебраическая функция[[5]](#footnote-5) - элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.

Алгебраическими функциями[[6]](#footnote-6) называют целые многочлены, рациональные дроби и иррациональные функции.

В математике.

Алгебраическими называют функции, составленные из букв и цифр, соединенных знаками действий сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в целую степень и извлечение корня. Другими словами: алгебраическими называют элементарные функции, которые могут быть получены из двух основных функций f(x)=x и f(x)=1 при помощи любого числа последовательно выполненных алгебраических действий (сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в целую степень, извлечение корня) и умножения на числовые коэффициенты.

Алгебраические функции подразделяются на рациональные и иррациональные[[7]](#footnote-7).

Рациональными называются алгебраические функции, которые не содержат аргумент под знаком радикала (корня).

Рациональные функции разделяются на целые рациональные функции (многочлены) и дробные рациональные (отношение многочленов).

Пример целой рациональной функции: E:\Education\fourthSemester\Основы компьютерной алгебры\Тема 2\Лабораторная работа\rational_func.png

Пример дробно-рациональной функции: E:\Education\fourthSemester\Основы компьютерной алгебры\Тема 2\Лабораторная работа\drobnorational_func.png

Иррациональными называются алгебраические функции, содержащие аргумент под знаком радикала (корня).

Примером может являться функция: E:\Education\fourthSemester\Основы компьютерной алгебры\Тема 2\Лабораторная работа\irrational_func.png

В компьютерной алгебре[[8]](#footnote-8).

Алгебраическим называется число, являющееся решением уравнения: P (x) = 0

Где P (x) – полином от одной переменной с целыми коэффициентами.

Пример. Полином P(x) = x2–2 порождает алгебраическое число √2.

Алгебраической называется функция, являющаяся решением уравнения: G (x) = 0

Где G (x) – порождающий полином от одной переменной с коэффициентами – полиномами от нескольких переменных с целыми коэффициентами.

Ключевая проблема построения канонического представления для алгебраических функций общего вида – это проблема определения их взаимозависимости.

Существует два способа решения указанной проблемы:

(1) Факторизация порождающего полинома алгебраической функции и анализ её результатов

(2) Построение примитивных элементов поля алгебраических функций.

Оба способа разрешения взаимозависимости рациональных функций вычислительно трудоёмки, поэтому в системах компьютерной алгебры канонические представления для алгебраических функций не применяются. Существование теоретических алгоритмов разрешения проблем представления алгебраических функций не означает их практическую реализацию.

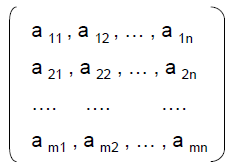
## Представление матриц

Матрица[[9]](#footnote-9)— математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы.

В математике обычно матрицы обозначаются прописными латинскими буквами. Например, матрица A, матрица B и так далее. Матрицы могут быть разного размера: прямоугольные, квадратные, также есть матрицы-строки и матрицы-столбцы, называемые векторами. Размер матрицы определяется количеством строк и столбцов, элементы, для которых i=j (a11, a22, .. ) образуют главную диагональ матрицы, и называются диагональными[[10]](#footnote-10).

В компьютерной алгебре различают две формы представления матриц[[11]](#footnote-11):

* Двумерный массив



* Список списков 

Где aij– это ссылки на представление элементов матриц (формул).

Для представления матриц обычно используется плотное представление (т.е. хранятся все элементы матриц, включая нулевые). В некоторых особых случаях для матриц специального вида (диагональных, ленточных и т.п.) применяется разреженное представление.

Замечание. В случае использования разреженного представления требуются специальные алгоритмы преобразований матриц.

1. [Академик](https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/308929) [↑](#footnote-ref-1)
2. [СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ SAGE КАК СРЕДСТВО ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ](https://cyberleninka.ru/article/n/sistema-kompyuternoy-algebry-sage-kak-sredstvo-dlya-resheniya-sistem-uravneniy) [↑](#footnote-ref-2)
3. [КСИПТ](http://kspt.icc.spbstu.ru/course/comp-algebra) [↑](#footnote-ref-3)
4. [Большой энциклопедический словарь](https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc3p/50874/%D0%90%D0%9B%D0%93%D0%95%D0%91%D0%A0%D0%90%D0%98%D0%A7%D0%95%D0%A1%D0%9A%D0%90%D0%AF) [↑](#footnote-ref-4)
5. [Википедия](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) [↑](#footnote-ref-5)
6. [Studfiles](https://studfiles.net/preview/2646984/) [↑](#footnote-ref-6)
7. [Cleverstudents](http://www.cleverstudents.ru/functions/elementary_functions_classification.html) [↑](#footnote-ref-7)
8. [КСИПТ](http://kspt.icc.spbstu.ru/course/comp-algebra) [↑](#footnote-ref-8)
9. [Википедия](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) [↑](#footnote-ref-9)
10. [Заочник.ру](https://zaochnik.ru/blog/matricy-i-osnovnye-dejstviya-nad-nimi/) [↑](#footnote-ref-10)
11. [КСИПТ](http://kspt.icc.spbstu.ru/course/comp-algebra) [↑](#footnote-ref-11)